Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a=3+4\sqrt{3}-\left(2+\sqrt{3}\right)^2=3+4\sqrt{3}-\left(7+4\sqrt{3}\right)=$	**3p**
	$=3+4\sqrt{3}-7-4\sqrt{3}=-4$, care este număr întreg	**2p**
2.	$f(a)=g(a)\Leftrightarrow 2a+3=4a^2+2a\Leftrightarrow a^2=\frac{3}{4}$	**3p**
	$a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ sau $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$	**2p**
3.	$2^{x^2+4x+2}=2^6\cdot 2^x\Leftrightarrow x^2+4x+2=6+x\Leftrightarrow x^2+3x-4=0$	**3p**
	$x=-4$ sau $x=1$	**2p**
4.	Mulțimea A are 5 elemente, deci sunt 5 cazuri posibile	**2p**
	Numerele a din mulțimea A care verifică inegalitatea $\sqrt{a^2-2a+1}\geq 3$ sunt -2 și 4, deci sunt 2 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{2}{5}$	**1p**
5.	$MQ \parallel NP\Rightarrow m_{MQ}=m_{NP}$, deci $m_{MQ}=4$	**3p**
	Ecuația dreptei MQ este $y-3=4(x-2)$, deci $y=4x-5$	**2p**
6.	$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}=2R$ și, cum $R=5$, obținem $\sin A=\frac{BC}{10}$, $\sin B=\frac{AC}{10}$ și $\sin C=\frac{AB}{10}$	**3p**
	$\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C=\frac{BC}{10}\cdot\frac{AC}{10}\cdot\frac{AB}{10}=\frac{AB\cdot AC\cdot BC}{1000}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1,0)=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(1,0)\right)=\begin{vmatrix}1&-1\\1&-1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=-1-(-1)=0$	**3p**
b)	$\det\left(A(a,b)\right)=\begin{vmatrix}a&a-2\\b+1&b-1\end{vmatrix}=2(b-a+1)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
	$a\in(-\infty,0)$ și $b\in(0,+\infty)\Rightarrow b-a+1>1\Rightarrow\det\left(A(a,b)\right)\neq 0$, deci $A(a,b)$ este inversabilă	**3p**
c)	$A(1,3)=\begin{pmatrix}1&-1\\4&2\end{pmatrix}$, $\det\left(A(1,3)\right)=6$, deci $A(1,3)$ este inversabilă și $\left(A(1,3)\right)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{6}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$	**3p**
	$X=\left(A(1,3)\right)^{-1}\cdot A(2,1)$ și, cum $A(2,1)=\begin{pmatrix}2&0\\2&0\end{pmatrix}$, obținem $X=\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}$	**2p**

2.a)	$1\circ(-1)=3\cdot 1\cdot(-1)-(1+(-1))+\frac{2}{3}=$	**2p**
	$=-3+\frac{2}{3}=-\frac{7}{3}$	**3p**
b)	$x\circ y=3xy-x-y+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=3x\left(y-\frac{1}{3}\right)-\left(y-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}=$	**3p**
	$=\left(y-\frac{1}{3}\right)(3x-1)+\frac{1}{3}=3\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(y-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$x\circ\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$ și $\frac{1}{3}\circ y=\frac{1}{3}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
	$1\circ\frac{1}{\sqrt{2}}\circ\frac{1}{\sqrt{3}}\circ\ldots\circ\frac{1}{\sqrt{2021}}=\left(\left(1\circ\frac{1}{\sqrt{2}}\circ\frac{1}{\sqrt{3}}\circ\ldots\circ\frac{1}{\sqrt{8}}\right)\circ\frac{1}{3}\right)\circ\frac{1}{\sqrt{10}}\circ\ldots\circ\frac{1}{\sqrt{2021}}=$ $=\frac{1}{3}\circ\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\circ\ldots\circ\frac{1}{\sqrt{2021}}\right)=\frac{1}{3}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=1'-\frac{1'\cdot(x^2+1)-1\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=$	**2p**
	$=-\frac{-2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)=1\Rightarrow y=1$ este ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f, deci panta asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f este egală cu 0	**3p**
	Panta dreptei de ecuație $y=2021$ este egală cu 0, deci asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției f și dreapta de ecuație $y=2021$ sunt paralele, deoarece au pante egale	**2p**
c)	$f''(x)=\frac{2(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}$, $x\in\mathbb{R}$ și $f''(x)=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ sau $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$	**2p**
	$f''(x)\le 0$, pentru orice $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$, $f''(x)\ge 0$, pentru orice $x\in\left[-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ și $f''(x)\le 0$, pentru orice $x\in\left[\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty\right)$, deci $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ și $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ sunt punctele de inflexiune ale funcției f	**3p**
2.a)	$\int_1^2\frac{f(x)}{\sin x}dx=\int_1^2\frac{e^x\sin x}{\sin x}dx=\int_1^2 e^x dx=$	**2p**
	$=e^x\Big\|_1^2=e^2-e=e(e-1)$	**3p**
b)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x\,dx=e^x\sin x\Big\|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x(\sin x)'dx=e^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos x\,dx=e^{\frac{\pi}{2}}-e^x\cos x\Big\|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x\,dx=$	**3p**
	$=e^{\frac{\pi}{2}}+1-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x\,dx$, deci $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x\,dx=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}$	**2p**

c)	$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{f(x)} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{x-\frac{\pi}{2}} \sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{e^x \sin x} dx = -e^{-\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} dx = -\frac{1}{\sqrt{e^\pi}} \cdot \ln\lvert\sin x\rvert \Big\vert_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} =$	**3p**
	$= -\frac{1}{\sqrt{e^\pi}}\left(\ln\left(\sin\frac{\pi}{2}\right) - \ln\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)\right) = -\frac{1}{\sqrt{e^\pi}}\left(\ln 1 - \ln\frac{1}{2}\right) = -\frac{\ln 2}{\sqrt{e^\pi}}$	**2p**